МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Северский технологический институт - филиал
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СТИ НИЯУ МИФИ)

Кафедра ЭиАФУ

Моделирование систем массового обслуживания в общеобразовательных учреждениях
Методическое пособие к проекту

Руководители:
Доцент каф. ЭиАФУ, к.т.н.
___________Иванов К.А.
Студент каф. ЭиАФУ
___________Правосуд С.С.

Северск 2019

Содержание

Введение

Теория массового обслуживания – один из многочисленных разделов математики, занимающийся обработкой и анализом процессов в различных системах, будь то системы обслуживания, управления или производства. В данных системах однородные события могут повторятся многократно, например, прием, обработка и передача информации.

Данная работа представляет собой работу по созданию и реализации математической модели системы массового обслуживания столовой общеобразовательного учреждения.

Цель работы – получить математическую модель в виде кода программы. Анализ СМО будет заключаться в определении ряда показателей модели, которые можно разделить на следующие группы:

а) показатели, характеризующие систему в целом**:** число n занятых каналов обслуживания(например, работников столовой, способных обслужить учащихся в необеденное время), число обслуженных λ_b (например, количество учеников, успевших купить желаемое блюдо на перемене), ожидающих обслуживание или получивших отказ заявок λ_c (например, стоящих в очереди и не успевших купить продукцию) в единицу времени;

б) вероятностные характеристики: вероятность того, что заявка будет обслужена $P_{обс}$ или получит отказ в обслуживании $P_{отк}$, что все работники свободны p_0 или определенное число их занято p_k, вероятность наличия очереди;

в) экономические показатели: стоимость потерь, связанных с уходом не обслуженного по тем или иным причинам учащегося из столовой, экономический эффект, полученный в результате обслуживания заявки, и т.д.

В ходе создания проекта проводится сравнительный анализ эффективности простейших систем массового обслуживания.

К рассмотренным системам относятся:

а) Системы с отказами;

б) Системы с ограничением на время пребывания заявки в очереди;

в) Системы с ограничением на длину очереди.

Сравнение систем проводится на основе сопоставления их показателей эффективности, характеризующих изучаемые системы, как с точки зрения потребителей, так и с точки зрения их эксплуатационных свойств.

1 Сбор исходных данных

В данном разделе необходимо провести эксперимент в столовой реального общеобразовательного учреждения. Нас будет интересовать следующие параметры:

$M_{обс}$ − количество поступивших заявок на обслуживание;

$k_{обс}$ − количество людей, находящихся в очереди на обслуживание;

$\bar{t}_{обс}$ – время обслуживания одной поступившей заявки;

λ_b − число обслуженных заявок во время перемены;

λ_a − число необслуженных заявок за время перемены;

$P_{обс}$ − вероятность обслуживания заявки на перемене;

n^* − число каналов обслуживания(кассиров).

Вероятность обслуживания заявки $P_{обс}$ вычислим по формуле:

$$P_{обс} = \frac{M_{обс}}{\lambda_b}$$

Данные занесем в таблицу:

Таблица 1 – исходные данные

Номер перемены	$M_{обс}$	$k_{обс}$	$\bar{t}_{обс}$	λ_a	λ_b	$P_{обс}$	n^*
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Часто мероприятия, осуществляемые для повышения показателей эффективности с точки зрения потребителя приводит к ухудшению показателей эксплуатационных свойств и наоборот . Чтобы оптимизировать нашу систему будем использовать экономические показатели, характеризующие систему одновременно с обеих точек зрения. В рассматриваемой работе в качестве основного такого показателя примем некоторую величину С – среднюю стоимость обслуживания заявки в единицу времени.

$$С = \frac{С_{общ}}{\lambda_b} \quad (2)$$

$$С_{общ} = c_к \bar{n}_з + c_{пк} \bar{n}_0 + c_{оч} \bar{r} + c_{отк} \lambda_c \quad (3)$$

где $С_{общ}$ –Суммарная стоимость обслуживания всех заявок в единицу времени;

$\bar{n}_з, \bar{n}_0$ – среднее число занятых и свободных каналов, соответственно;

$\bar{r}$ – среднее число заявок, находящихся в очереди;

$\lambda_с$ –среднее число заявок, получивших отказ в обслуживании за 1 минуту;

$с_к$ – стоимость эксплуатации одного канала;

$с_{пк}$ – стоимость простоя одного кассира;

$с_{оч}$ – стоимость эксплуатации одного места в очереди;

$с_{отк}$ – стоимость убытков, связанных с уходом заявки из системы, получившей отказ в обслуживании.

В качестве весовых коэффициентов для стоимостей примем:

$с_к = 0{,}5\,\frac{\text{ед.стоим.}}{\text{канал}}$, $с_{пк} = 0{,}2\,\frac{\text{ед.стоим.}}{\text{канал}}$, $с_{оч} = 0{,}1\,\frac{\text{ед.стоим.}}{\text{заявка в очереди}}$, $с_{отк} = 0{,}2$ ед. стоим.·ед. врем.

Также в качестве ограничений примем:

а) число каналов обслуживания не больше максимально возможного числа кассиров;

б) среднее время пребывания заявки в очереди не больше времени перемены.

2 Этапы выполнения

2.1 Первый этап - система с отказами

Система состоит из одного узла обслуживания, содержащего n каналов (кассиров), каждый из которых может обслуживать только одну заявку.

Все каналы обслуживания одинаковой производительности и для модели системы неразличимы. Если заявка поступила в систему и застала свободным хотя бы один канал, она мгновенно начинает обслуживаться. Если в момент поступления заявки в систему все каналы заняты, то заявка покидает систему не обслуженной.

На этом этапе проводится минимизация средней стоимости обслуживания одной заявки в единицу времени для системы с отказами.

Требуется определить число n^* каналов обслуживания, обеспечивающее в системе с отказами наименьшее значение параметра С – средней стоимости обслуживания одной заявки в единицу времени. . В качестве оптимального числа каналов n^* следует принять такое значение , при котором принимает наименьшее значение средняя стоимость С обслуживания одной заявки в единицу времени.

Все данные, полученные при расчетах, заносим в таблицу:

Таблица 2 – Расчет системы с отказами

Система с отказами $\lambda =$ ____1/ед.врем., $\bar{t}_{обс} =$ ____ед.врем..							Результирующие показатели			
n	$\bar{n}_з$	$\bar{n}_0$	$\bar{r}$	λ_c $\frac{1}{ед.вр}$	λ_b $\frac{1}{ед.вр}$	$C_{общ}$ ед.ст	C ед.ст	$P_{обс}$	$k_з$	$\bar{t}_{сист}$ ед.вр
1										
2										
3										
4										
5										
6										

Также в качестве результатов можно привести графическую зависимость вероятности обслуживания заявки от числа кассиров, время пребывания заявки от числа кассиров и среднюю стоимость обслуживания одной заявки от количества кассиров:

$$C = C(n),$$
$$P_{обс} = P_{обс}(n),$$
$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{сист}(n).$$

Необходимый список формул для расчета:

$$\alpha = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}},\ p_0 = [\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}]^{-1},\ p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0,\quad p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0,\ P_{\text{обс}} = 1 - p_n,$$

$$\lambda_b = \lambda P_{\text{обс}},\quad \bar{n}_{\text{з}} = \alpha P_{\text{обс}},\ \bar{n}_0 = n - \bar{n}_{\text{з}},\ k_{\text{з}} = \frac{\bar{n}_{\text{з}}}{n},\ \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{n}_{\text{з}}}{\lambda}.$$

2.2 Второй этап - смешанная система

2.2.1 Система с ограничением длины очереди

Система с ограничением на длину очереди состоит из очереди и узла обслуживания. Заявка покидает очередь и уходит из системы, если в накопителе к моменту ее появления уже находятся m заявок (m – максимально возможное число мест в очереди). Если заявка поступила в систему и застала свободным хотя бы один канал обслуживания, она мгновенно начинает обслуживаться. Если в момент поступления заявки в систему все каналы заняты, то заявка не покидает систему, а занимает место в очереди. Заявка покидает систему не обслуженной, если к моменту её поступления заняты все места в очереди.

Для каждой системы определяется дисциплина очереди. Это система правил, определяющих порядок поступления заявок из очереди в узел обслуживания. Если все заявки и каналы обслуживания равнозначны, то чаще всего действует правило «кто раньше пришел, тот раньше обслуживается». В рассматриваемом случае анализируется влияние на эффективность системы ограничения на длину очереди.

Задаваясь рядом значений параметра, m вычисляем зависимости $C(m)$, $P_{\text{обс}}(m)$, $\bar{t}_{\text{сист}}(m)$. Оптимальной считается система, имеющая наименьший показатель эффективности C.

Таблица 3 – Расчет системы с ограничением длины очереди

Система с ограничениями на длину очереди $n^* =$ ___, $\lambda =$ ___1/ед.врем., $\bar{t}_{\text{обс}} =$ ___ ед.врем..							Результирующие показатели			
m	$\bar{n}_{\text{з}}$	$\bar{n}_0$	$\bar{r}$	λ_c $\frac{1}{\text{ед.вр}}$	λ_b $\frac{1}{\text{ед.вр}}$	$C_{\text{общ}}$ ед.ст	C ед.ст	$P_{\text{обс}}$	$k_{\text{з}}$	$\bar{t}_{\text{сист}}$ ед.вр
	Данные системы с отказами									
m = 0										
Данные системы ограничениями на длину очереди										
1										
2										
3										
4										
5										

Таблица 4 – Сравнение двух типов систем

К вычислению общей стоимости обслуживания заявок в единицу времени					
m	$0{,}5 \cdot \bar{n}_з$ ед.стоим.	$0{,}2 \cdot \bar{n}_0$ ед.стоим.	$0{,}1 \cdot \bar{r}$ ед.стоим.	$0{,}2 \cdot \lambda_c$ ед.стоим.	$С_{общ}$ ед.стоим.
Данные системы с отказами					
m = 0					
Данные системы ограничениями на длину очереди					
1					
2					
3					
4					

Необходимый список формул для расчета:

$$p_0 = [\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s]^{-1}, \quad p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad 1 \le k \le n,$$

$$p_{n+s} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s p_n, \quad 1 \le s \le m. \ \mathrm{P}_{обс} = 1 - \mathrm{p}_{n+m}, \ \lambda_b = \lambda P_{обс}, \quad \lambda_c = \lambda - \lambda_b.$$

$$\bar{n}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k, \quad \bar{n}_з = n - \bar{n}_0, \quad к_з = \frac{\bar{n}_з}{n}, \quad \bar{l} = \bar{r} + \bar{n}_з, \quad \bar{t}_{сист} = \frac{\bar{l}}{\lambda},$$

$$\bar{r} = \sum_{s=1}^{m} s p_{n+s} = p_n \sum_{s=1}^{m} s \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s$$

2.2.2 Система с ограничением времени пребывания в очереди

Система с ограничением на длительность пребывания заявки в очереди состоит из накопителя (очереди) и узла обслуживания. От предыдущей системы она отличается тем, что заявка, поступившая в накопитель (очередь), может ожидать начала обслуживания лишь ограниченное время $Т_{ож}$ (время перемены, например). Если её время $Т_{ож}$ истекло, то заявка покидает очередь и уходит из системы не обслуженной.

В данном расчете нам необходимо проанализировать, как влияет на эффективность системы $\bar{t}_{ож}$ – среднее время пребывания заявки в очереди. Задаваясь рядом значений параметра $\bar{t}_{ож}$, вычисляем те же показатели эффективности С, $P_{обс}$, $\bar{t}_{сист}$., что и для системы с отказами. Полученные данные заносим в таблицу. Приводим графики зависимости этих показателей от величины $\bar{t}_{ож}$. Оптимальной считается система, имеющая наименьший показатель эффективности С.

Сложность заключается в выборе значений параметра $\bar{t}_{ож}$. Следует учесть, что для системы с отказами $\bar{t}_{ож} = 0$. Далее рекомендуется выбрать значение этого параметра, равным среднему времени обслуживания одной заявки $\bar{t}_{ож} = \bar{t}_{обс}$. Если вычисленное при этом условии значение показателя С меньше, чем у оптимальной СМО с отказами, то $\bar{t}_{ож}$ следует увеличить, в противном случае его нужно уменьшить. Достаточно провести расчеты для трех – четырех его значений. Финальные вероятности рассчитываются с точностью до 0,01

Таблица 5 – Расчет системы с ограничением на время пребывания в очереди

Система с ограничением на время пребывания в очереди $n^* =$ ____, $\lambda =$ ____1/ед.врем., $\bar{t}_{обс} =$ ____ ед.врем..							Результирующие показатели			
$\bar{t}_{ож}$	$\bar{n}_з$	$\bar{n}_0$	$\bar{r}$	λ_c $\frac{1}{ед.вр}$	λ_b $\frac{1}{ед.вр}$	$C_{общ}$ ед.ст	C ед.ст	$P_{обс}$	$k_з$	$\bar{t}_{сист}$ ед.вр
Данные системы с отказами										
$\bar{t}_{ож} = 0$										
Данные системы с ограничением на время пребывания в очереди										
$\bar{t}_{ож} = \bar{t}_{обс}$										

Таблица 6 – Сравнение двух типов систем

К вычислению общей стоимости обслуживания заявок в единицу времени					
$\bar{t}_{ож}$	$0,5 \cdot \bar{n}_з$ ед.стоим.	$0,2 \cdot \bar{n}_0$ ед.стоим.	$0,1 \cdot \bar{r}$ ед.стоим.	$0,2 \cdot \lambda_c$ ед.стоим.	$C_{общ}$ ед.стоим.
Данные системы с отказами					
$\bar{t}_{ож} = 0$					
Данные системы с ограничением на время пребывания в очереди					
$\bar{t}_{ож} = \bar{t}_{обс}$					

Необходимый список формул для расчета:

$$\alpha = \lambda \cdot \bar{t}_{обс}, \quad \beta = \frac{\bar{t}_{обс}}{\bar{t}_{ож}},$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} z_s\right]^{-1}, \qquad z_0 = 1, \quad z_s = z_{s-1} \frac{\alpha}{(n+s\beta)}$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \qquad 0 \le k \le n, \quad p_{n+s} = p_n \cdot z_s, \quad s = 1, 2, \dots.$$

$$\bar{n}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k, \quad \bar{n}_з = n - \bar{n}_0, \quad P_{обс} = \frac{\bar{n}_з}{\alpha}, \quad \lambda_b = \lambda P_{обс}, \quad \lambda_c = \lambda - \lambda_b.$$

$$к_з = \frac{\bar{n}_з}{n}, \quad \bar{r} = \frac{\alpha}{\beta}(1 - P_{обс}), \quad \bar{l} = \bar{r} + \bar{n}_з, \quad \bar{t}_{сист} = \frac{\bar{l}}{\lambda}.$$

2.3 Третий этап – влияние производительности каналов

Производительность канала обслуживания определяется величиной параметра $\bar{t}_{обс}$ – средним временем обслуживания одной заявки. Рассматривается смешанная система, признанная оптимальной. Показатели эффективности этой первоначальной системы сравниваются с аналогичными показателями двух вариантов этой системы:

а) системы с уменьшенной производительностью каналов обслуживания за счет увеличения в два раза среднего времени обслуживания и с уменьшенными затратами, связанными с эксплуатацией и простоем оборудования

$$\bar{t}^{a}_{\text{обс}} = 2 \cdot \bar{t}_{\text{обс}}, \quad c^{b}_{\text{к}} = 0{,}6 \cdot c_{\text{к}}, \quad c^{b}_{\text{пк}} = 0{,}75 \cdot c_{\text{пк}}.$$

б) системы с увеличенной производительностью каналов обслуживания за счет уменьшения в два раза среднего времени обслуживания и увеличенными затратами, связанными с эксплуатацией и простоем оборудования

$$\bar{t}^{b}_{\text{обс}} = 0{,}5 \cdot \bar{t}_{\text{обс}}, \quad c^{b}_{\text{к}} = 1{,}6 c_{\text{к}}, \quad c^{b}_{\text{пк}} = 1{,}5 c_{\text{пк}}$$

Таблица 7 – Исходные данные

Заданная смешанная система $\bar{t}^{*}_{\text{ож}} =$ ____ ед.врем. или $m^{*} =$ ____. $n^{*} =$ ____, $\lambda =$ ____ 1/ед.врем., $\bar{t}_{\text{обс}} =$ ____ ед.врем.								Результирующие показатели			
	$\bar{t}_{\text{обс}}$ ед.вр	$\bar{n}_{\text{з}}$	$\bar{n}_0$	$\bar{r}$	λ_c $\frac{1}{\text{ед.вр}}$	λ_b $\frac{1}{\text{ед.вр}}$	$C_{\text{общ}}$ ед.ст	С ед.ст	$P_{\text{обс}}$	$k_{\text{з}}$	$\bar{t}_{\text{сист}}$ ед.вр
Первоначальный вариант											
Вариант а											
Вариант б											

Таблица 8 – Сравнение и оптимизация параметров

К вычислению общей стоимости обслуживания заявок в единицу времени						
	$\bar{t}_{\text{обс}}$ ед.вр	$c_{\text{к}} \cdot \bar{n}_{\text{з}}$ ед.стоим.	$c_{\text{пк}} \cdot \bar{n}_0$ ед.стоим.	$c_{\text{оч}} \cdot \bar{r}$ ед.стоим.	$c_{\text{отк}} \cdot \lambda_c$ ед.стоим.	$C_{\text{общ}}$ ед.стоим.
Первоначальный вариант						
Вариант а						
Вариант б						